

Chapitre 8. Intégrales généralisées.

§8.1. Intégrales généralisées sur un intervalle borné.

Déf Soit $a < b$ et $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt, \text{ si la limite existe}$$

Notations

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(t) dt$ est divergente.

Si $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on définit l'intégrale généralisée par la limite

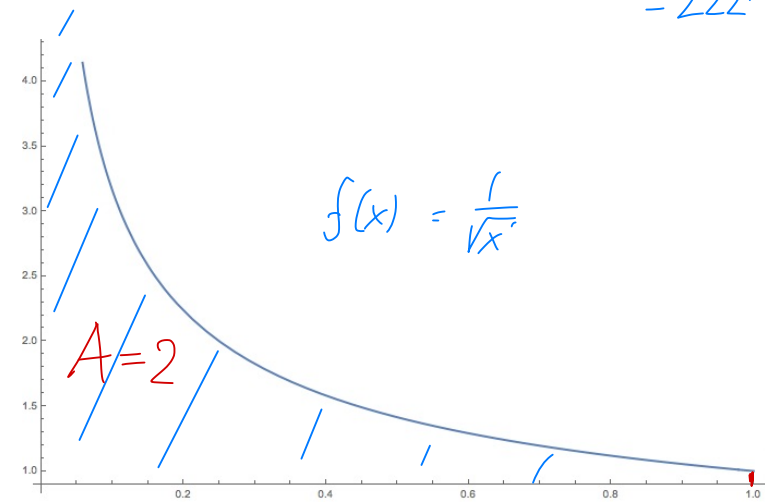
$$\int_{a+}^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt, \text{ si la limite existe}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^b f(t) dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, 1]$

$$\int_{0+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0+} \int_h^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{h \rightarrow 0+} \left. \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right|_h^1 =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} 2(1 - \sqrt{h}) = 2.$$

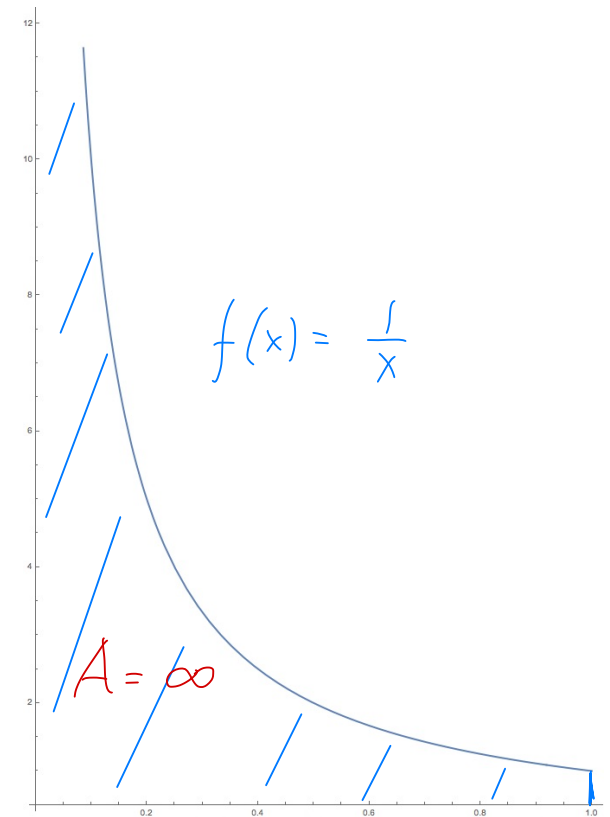


Ex 2. L'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$, $x \in]0, 1]$

$$\int_{0+}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} (\log 1 - \log t) = +\infty$$

"0" $\rightarrow -\infty$

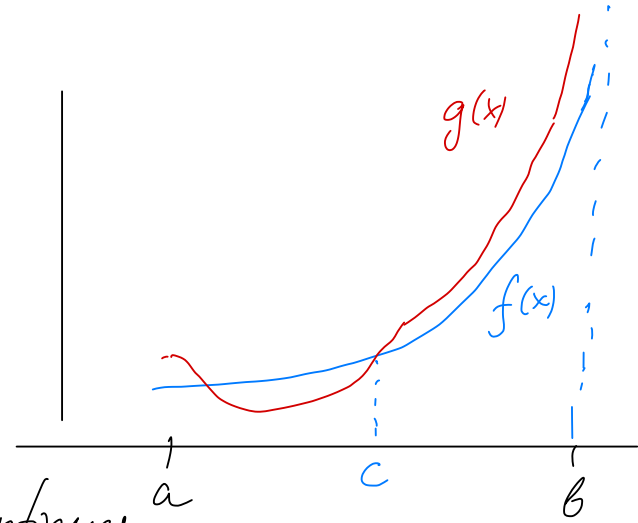
L'intégrale généralisée $\int_{0+}^1 \frac{dx}{x}$ est divergente.



Proposition. Critère de comparaison. Soient $f, g :]a, b[$ fonctions continues
telles qu'il existe $c \in]a, b[: 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in]c, b[$

Alors si $\int_a^{b-} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{b-} f(x) dx$ converge
(la limite finie existe)

si $\int_a^{b-} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{b-} g(x) dx$ diverge



Il existe un critère similaire pour $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Ex. $\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \stackrel{\alpha \neq 1}{=} - \int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u^\alpha} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{-\alpha+1} u^{-\alpha+1} \Big|_x^{b-a} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} \left((b-a)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} \right) =$

changement de variable
 $u = b-t \Rightarrow du = -dt$

$t=a \Rightarrow u=b-a, t=b^- \Rightarrow u=0+$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$ $\int_a^{b-} \frac{dt}{b-t} = - \lim_{x \rightarrow b-} \left(\log(b-x) - \log(b-a) \right) \xrightarrow{+\infty} +\infty$ divergente

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Corollaire Soit $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot (b-x)^\alpha = \ell \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Dém: Soit $\ell > 0$; $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \Rightarrow \exists c \in [a, b[: \forall x \in [c, b[$ on a

$$\frac{1}{2}\ell \leq \underbrace{(b-x)^\alpha}_{>0} f(x) \leq \frac{3}{2}\ell \Leftrightarrow \frac{\ell}{2} \frac{1}{(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2} \frac{1}{(b-x)^\alpha} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow$ Par le critère de comparaison $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$
divergente $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$ □

D'une façon similaire on obtient: Soit $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)(x-a)^\alpha = \ell \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Ex. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge ou diverge? (la primitive ne s'exprime pas en fonctions élémentaires).

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t+t^2)}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} \stackrel{\alpha = \frac{1}{2}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0.$$

$(1-t)^{1/2}$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ par le Corollaire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ est convergente.

Déf Soit $a < b$, $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $c \in]a, b[$ arbitraire

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t) dt \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{b-} f(t) dt \text{ converge si et seulement si}$$

les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de $c \in]a, b[$.

Ex.
$$\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r (1-x)^s} = \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r (1-x)^s} + \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r (1-x)^s}$$

(1) On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{x^r (1-x)^s} = l \neq 0 \neq \infty$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha = r$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cancel{x^r}}{\cancel{x^r} (1-x)^s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r (1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow r < 1$$

(2) On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) (1-x)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)^\alpha}{x^r (1-x)^s} = l \neq 0 \neq \infty$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha = s$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)^{\cancel{s}}}{x^r (1-x)^{\cancel{s}}} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r (1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow s < 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r (1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow \underline{r < 1 \text{ et } s < 1.}$$

§ 8.2. Intégrales généralisées sur un intervalle non borné.

Déf. Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{dét}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \quad \text{si la limite existe.}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{\infty} f(t) dt$ est divergente.

Soit $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.^a Alors l'intégrale généralisée

$$\int_b^{-\infty} f(t) dt \stackrel{\text{dét}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_b^x f(t) dt \quad \text{si la limite existe.}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_b^{-\infty} f(t) dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [e, +\infty[$

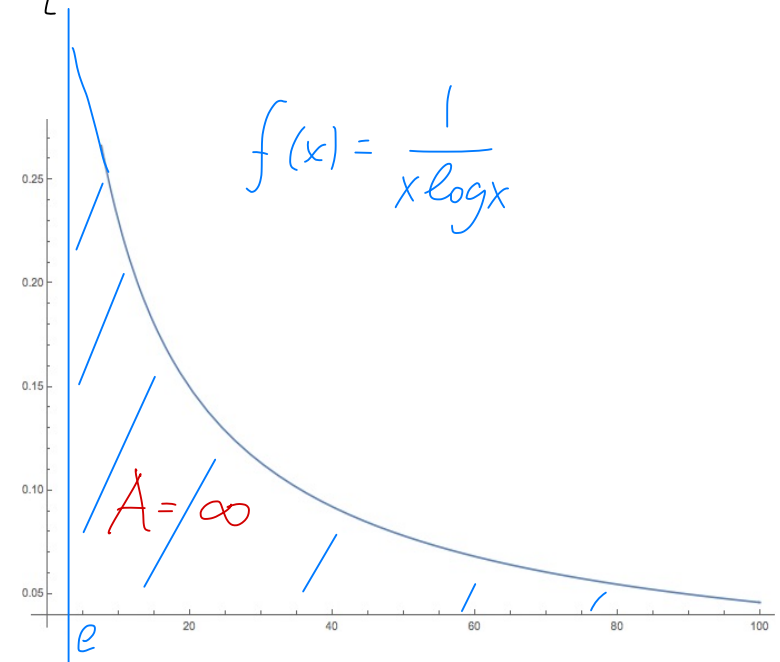
$$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t \log t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t \log t} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u} =$$

$u = \log t$
 $du = \frac{dt}{t}, \log e = 1, \log x = y \rightarrow \infty$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \log |u| \Big|_1^{\infty} = \lim_{y \rightarrow \infty} (\log y - \log 1) = \infty \Rightarrow$$

$\rightarrow \infty$

$$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t \log t} \text{ diverge.}$$



Ex 2. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$, $x \in [e, \infty[$.

$$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t(\log t)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t(\log t)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u^2} =$$

$u = \log t$
 $\Rightarrow du = \frac{dt}{t}$
 $\log e = 1, y = \log x \rightarrow \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{y} + 1 \right) = 1$$

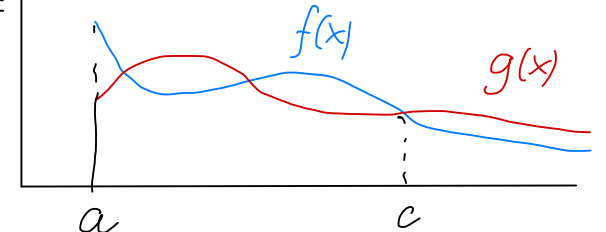
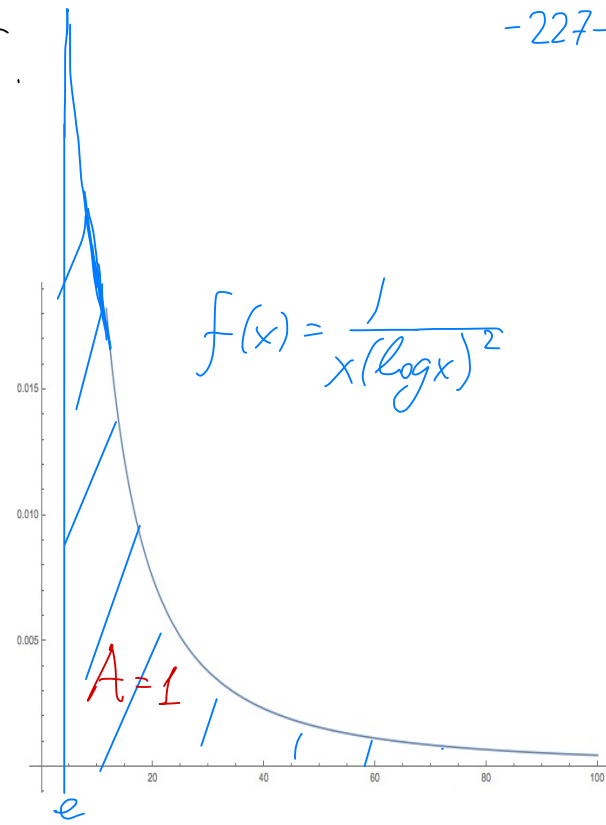
Critère de comparaison. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x > c$ pour un certain $c > a$, Alors

si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ converge ; si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge.

Ex. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^{\beta}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} (R^{1-\beta} - 1) =$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{1-\beta}, & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge,} & \text{si } \beta < 1 \end{cases} ; \text{ Si } \beta = 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\log R - \log 1) = \infty \text{ divergente}$$

$\log R \rightarrow \infty, \log 1 = 0$



$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \frac{1}{\beta-1} \quad \text{si } \beta > 1$$

divergente, si $\beta \leq 1$

à comparer
avec

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \alpha < 1$$

diverge, $\alpha \geq 1$

Corollaire Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^{\beta} = \ell \neq 0$
 $\ell \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^{\infty} f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$
diverge $\Leftrightarrow \beta \leq 1$

Ex. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge ou diverge? (ne s'exprime pas en fonctions élémentaires).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta}}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \stackrel{\beta=3/2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} > 1$$

il faut prendre $\beta = \frac{3}{2}$ pour une limite $\neq 0$. $\Rightarrow$ l'intégrale converge.

Déf Soit f une fonction continue sur $]a, +\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt \quad \text{pour un } c \in]a, \infty[$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{\infty} f(t) dt$ diverge.

Déf Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors on peut aussi considérer
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{d} \text{é} \text{f}}{=} \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt$, $c \in \mathbb{R}$, qui est convergente

si et seulement si les deux intégrales convergent.

La définition ne dépend pas du choix de $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ convergente? $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ par le Corollaire
 l'intégrale $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ diverge.

Directement: $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\cot g x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\cot g \frac{\pi}{2} + \cot g \varepsilon) = \infty \Rightarrow$ divergente.

Exercice. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = ?$ calculer l'intégrale généralisée si elle converge.

Critère de comparaison: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^\beta}{x^2 + 4x + 9} = \ell \neq 0$ $\Rightarrow$ il faut prendre $\beta = 2$ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 9} = 1 \neq 0 \in \mathbb{R}$

Puisque $\beta = 2 > 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9}$ converge.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\underbrace{x^2+4x+9}_{>0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\underbrace{(x+2)^2+5}_{>0}} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Changement de variable

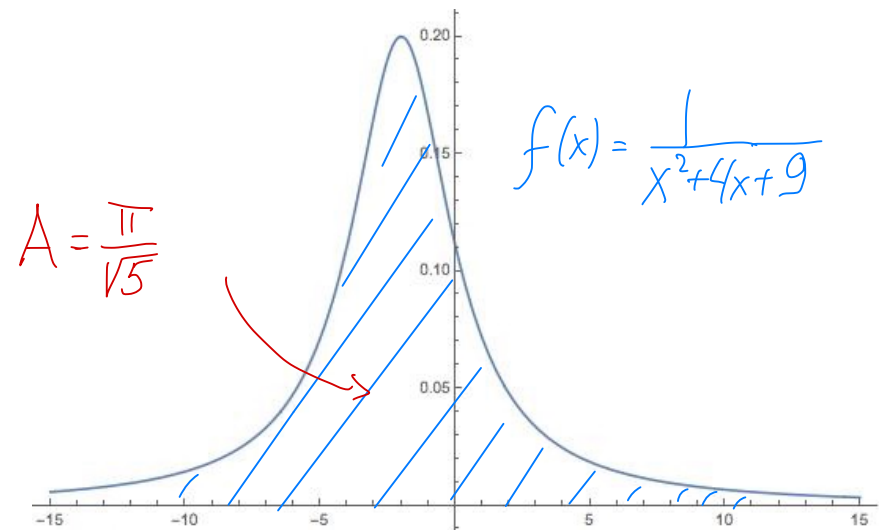
$$u = \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}} dx$$

$u \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow \pm\infty, x = -2 \Rightarrow u = 0$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_R^0 \frac{du}{u^2+1} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^R \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctg} u \Big|_R^0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctg} u \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow -\infty} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctg} R \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arctg} R - 0 \right) =$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$



E_x

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x^2)^{\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ \sin |x| & , x < 0 \end{cases}$$

continue en $x=0$?
dérivable en $x=0$?

